INSIEMI NUMERICI

$\mathbb{N}$: numeri naturali ; $\mathbb{N}_* = \{1,2,\dots\}$ senza lo 0

$\mathbb{Z}$: interi

$\mathbb{Q}$: razionali $\{p/q : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, p,q$ primi tra loro$\}$

$\mathbb{R}$: reali

$\mathbb{C}$: complessi ($x^2 = -1$ ha soluzioni)

CONNETTIVI LOGICI

$\wedge$: et $\quad \vee$: vel $\quad \neg$: not

$\Leftrightarrow$: se e solo se (sse) $\quad \Rightarrow$: se (se la prima è vera allora la seconda è vera)

QUANTIFICATORI

$\forall$: universale (per ogni) $\quad \exists$: esistenza (esiste)

LINGUAGGIO DEGLI INSIEMI

$x \in A$: appartiene $\quad \notin$: non appartiene

$A \subseteq B$: è contenuto $\quad \emptyset$: insieme vuoto

$A \cup B$: unione $\quad \cap$: intersezione

$\setminus$: differenza $\quad \Delta$: differenza simmetrica.

prodotto cartesiano:

$A \times B = \{(x,y) : x \in A, y \in B\}$

(coppie ordinate)

es: $A = \{1,2,3\}$ $B = \{a,b\}$ $A \times B = \{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b)\}$

insieme delle parti:

$\mathcal{P}(X) = \{A : A \subseteq X\}$ è il gruppo composto dai sottoinsiemi

es: $X = \{a,b,c\}$ $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{b,c\}, \{a,c\}, \{a,b,c\}\}$

$|X| =$ n° elementi di X

se $|X| = n \rightarrow |\mathcal{P}(X)| = 2^n$ (2 possibilità per ogni elemento: lo prendo oppure no)

$A^c = \{x \in X : x \notin A\} = X \setminus A$: complementare

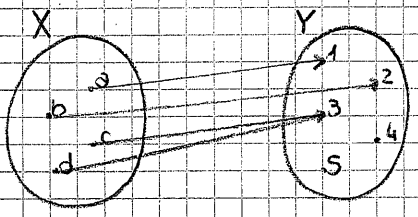
FUNZIONI

- dominio : X
- codominio : Y
- legge che ad ogni elemento di X ne associa uno ed uno solo di Y.

$f : X \mapsto Y$

- grafico : $Gf = \{(x,y) \in X \times Y : y = f(x)\}$: è un sottoinsieme del prodotto cartesiano (di tutte le coppie ordinate ne prendo solo alcune)

- Immagine: $\text{Im} f = \{y \in Y : \exists x \in X,\ y = f(x)\}$
- Controimmagine di $B \subseteq Y$: $f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$



dominio: X
codominio: Y
immagine: $\{1,2,3\}$
controimmagine di 3: $\{c,d\}$

Def: $f: X \mapsto Y$ è
- <u>iniettiva</u> se $\forall x, x' \in X,\ f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$
- <u>surgettiva</u> se $\forall y \in Y\ \exists x \in X : f(x) = y$
- <u>bigettiva</u> se è $\forall y \in Y\ \exists!\ x \in X : f(x) = y$

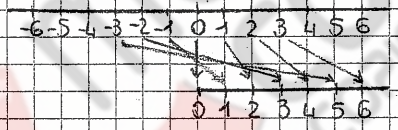
inoltre $\exists!\ g : X \mapsto Y : g(f(x)) = x\ \forall x \in X \wedge f(g(x)) = y\ \forall y \in Y$
↓ funzione inversa

Due insiemi hanno la stessa <u>cardinalità</u> se sono in bigezione

Def: X è numerabile se $\exists f : X \mapsto \mathbb{N}$ con f bigettiva

$\mathbb{Z}$ è numerabile

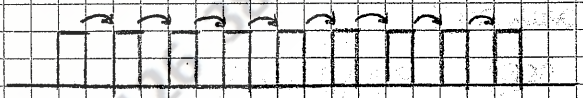
$$f: \begin{cases} 2k & \text{se } k > 0 \\ 0 & \text{se } k = 0 \\ -2k-1 & \text{se } k < 0 \end{cases}$$



PRINCIPIO DI INDUZIONE

$P(n)$, $n \in \mathbb{N}$

$P(0)$ è vera
$P(n) \Rightarrow P(n+1)$
$\Rightarrow P(n)$ vera $\forall n \in \mathbb{N}$



Se il 1° cade e ogni tessera cadendo fa cadere quella dopo allora cadono tutte.

ES: $1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$: $P(n)$

- $P(0)$: vera
- $P(n) \Rightarrow P(n+1)$?

$$P(n+1) = 1+2+\ldots+n+n+1 = \frac{n(n+1)}{2} + n+1 = (n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = P(n+1)$$ ∎

SUCCESSIONI

$$f: \begin{matrix} n & \mapsto & a_n \\ \cap & & \cap \\ \mathbb{N} & & \mathbb{R} \end{matrix}$$

- definizione esplicita: es: $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$

- definizione ricorsiva: es: $\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_{n+1} = a_n + (n+1) \end{cases}$

es: $\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = (n+1) \cdot a_n \end{cases} \rightarrow a_n = n!$ ($0! = 1$ perché 1 è elemento neutro)

es: $\begin{cases} f_0 = 0 \\ f_1 = 1 \\ F(n+1) = f_n + f(n-1) \end{cases}$

$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} \right)^n - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^n \right]$

Progressione geometrica:

$P(n) = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$

Dim: • $P(0)$: $1 = \frac{x^1 - 1}{1 - 1}$ ✓

• $P(n) \Rightarrow P(n+1)$?

$P(n+1) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + x^{n+1} = \frac{x^{n+1} - 1}{x-1} + x^{n+1} = \frac{x^{n+1} - 1 + x^{n+2} - x^{n+1}}{x-1} = P(n+1)$ ■

Sommatoria:

$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \sum_{k=1}^{n} k$ k: parametro muto o variabile locale (posso chiamarlo come voglio)

Proprietà:

- Linearità: $c \cdot \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} c a_k$

$\sum_{k=0}^{n} a_k + \sum_{k=0}^{n} b_k = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k)$

- Additività: $\sum_{k=0}^{n+m} a_k = \sum_{k=0}^{n} a_k + \sum_{k=n+1}^{n+m} a_k$

- $\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{n-m} a_{(k-m)}$ (è la stessa cosa scritta in modi diversi)

ES: $(x-1) \sum_{k=0}^{n} x^k = x^{n+1} - 1$

$\sum_{k=0}^{n} (x-1) x^k = \sum_{k=0}^{n} (x^{k+1} - x^k) = \sum_{k=0}^{n} x^{k+1} - \sum_{k=0}^{n} x^k = \sum_{h=1}^{n+1} x^h - \sum_{h=0}^{n} x^h = x^{n+1} + \sum_{h=1}^{n} x^h - x^0 - \sum_{h=1}^{n} x^h = x^{n+1} - 1$

con $h = k+1$ con $h = k$

Coefficiente binomiale

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ $n \in \mathbb{N}$, $0 \le k \le n$

Proprietà:

- $\binom{n}{0} = \frac{n!}{0! \cdot n!} = 1$
- $\binom{n}{n} = \frac{n!}{n! \cdot 0!} = 1$

} coefficienti estremi

- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ simmetria ←

- $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ ricorrenza

Dim: $\frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k} \right) = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!} \cdot \frac{(n-k+k)}{k(n-k)} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ ■

n=0 : 1
n=1 : 1 1
n=2 : 1 2 1
n=3 : 1 3 3 1
n=4 : 1 4 6 4 1

triangolo di Tartaglia o di Pascal.

Formula del binomio di Newton

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \dots + \binom{n}{n}a^0 b^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}\cdot b^k$$

Dim: • $\mathcal{P}(0)$: $(a+b)^0 = \binom{0}{0}a^0 b^0 = 1\cdot 1\cdot 1$ ✓

• $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$?

$$(a+b)^n = (a+b)(a+b)^{n-1} = (a+b)\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}a^{n-1-k}b^k = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}a^{n-k}b^k + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}a^{n-1-k}b^{k+1} =$$

$$= \underbrace{\binom{n-1}{0}}_{k=0}a^n + \sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-1}{k}a^{n-k}b^k + \underbrace{\binom{n-1}{n-1}}_{k=n-1}b^n\cdot a^0 + \sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-1}{k}a^{n-1-k}b^{k+1} =$$

$$= a^n + \sum_{h=1}^{n-1}\binom{n-1}{h}a^{n-h}b^h + b^n + \sum_{h=1}^{n-1}\binom{n-1}{h-1}a^{n-h}b^h = a^n + b^n + \sum_{h=1}^{n-1}\left[\underbrace{\binom{n-1}{h}+\binom{n-1}{h-1}}_{\text{formula ricorsiva}}\right]a^{n-h}b^h =$$

$$= \binom{n}{0}a^n + \sum_{h=1}^{n-1}\binom{n}{h}a^{n-h}b^h + \binom{n}{n}b^n = \sum_{h=0}^{n}\binom{n}{h}a^{n-h}b^h \quad \blacksquare$$

Interpretazione combinatoria dei coefficienti binomiali

$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = aa + ab + ba + bb$: 4 addendi : 2^2

$(a+b)^3 = (a+b)(a+b^2) = aaa + aba + baa + bba + aab + abb + bab + bbb$: 8 addendi : 2^3

$(a+b)^n$: 2^n addendi → combinazione delle lettere a e b per formare parole di n lettere dove k volte (dopo aver usato la proprietà commutativa)

oss: $\binom{n}{k}$ = numero di stringhe di lunghezza n sull'alfabeto $\{a,b\}$, che contengono esattamente k ripetizioni della lettera b.

		b		b		b			b
1	2	3		..					n

→ scelgo dove va la b: $\binom{n}{k}$ = numero di modi in cui si possono scegliere k oggetti su n totali

$\binom{n}{0} = 1$: stringa con tutte a ; $\binom{n}{n}$ = stringa con tutte b

$\binom{3}{2} = 3$: abb, bab, bba $= \binom{3}{2-1}$: aab, aba, baa. → simmetria

$S = \{$stringhe di lunghezza n dove b compare k volte$\}$

$S = \{$stringhe $s \in S$: s finisce con b$\} \cup \{s$: s finisce con a$\}$

$\binom{n-1}{k-1}$ nell'ultima posizione ho già b : devo scegliere dove mettere le altre b (che sono k-1) nei restanti n-1 posti

$\binom{n-1}{k}$ ci sono k b, ma b non può andare nell'ultimo posto : ricorrenza.

Proprietà:

- $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

  $(1+1)^n$: estendo la formula del binomio di Newton : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ con $a=b=1$

- $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$

  $(1-1)^n$: estendo la formula del binomio di Newton con $a=1$ e $b=-1$

Problemi di conteggio

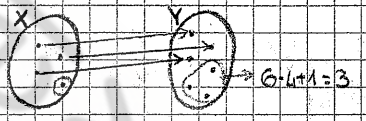
- Quante sono le funzioni iniettive $f: X \to X$ dove $|X|=n$?

  - 1° elemento: n scelte
  - 2° elemento: n-1 scelte
  - ultimo elemento: 1 scelta

  $\Big\} \; n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1 = n!$

- Quante sono le funzioni iniettive $f: X \to Y$ dove $|X|=n$ e $|Y|=m$?

  $n \leq m$ altrimenti non può essere iniettiva
  - 1° elemento: m scelte
  - 2° elemento: m-1 scelte
  - ultimo elemento: m-n+1 scelte

  $$\frac{m \cdot (m-1) \cdot \ldots \cdot (m-n+1) \cdot \cancel{(m-n)(m-n-1) \cdot \ldots \cdot 1}}{\cancel{(m-n)(m-n-1) \cdot \ldots \cdot 1}} = \frac{m!}{(m-n)!}$$

- $I_n := \{k \in \mathbb{N} : 1 \leq k \leq n\}$

  quante sono le funzioni strettamente crescenti $f: I_n \to I_n$?

  cioè: ogni x deve essere collegata ad un'altra x in modo che la funzione sia crescente : $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

  ← questo è l'unico modo:

  per coprire tutto il D e il C e avere una funzione strettamente crescente si può solo seguire la diagonale del quadrato.

  soluzione: 1

FUNZIONI REALI DI VARIABILE REALE

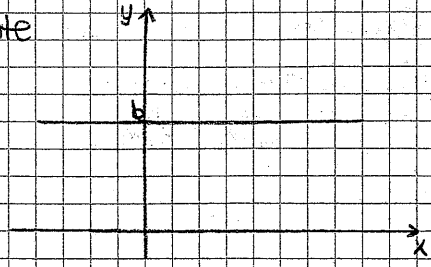
$f: x \mapsto f(x)$
$\quad\;\; \cap \quad\;\; \cap$
$\quad\;\; \mathbb{R} \quad\;\; \mathbb{R}$

$Gf \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \; (= \mathbb{R}^2) \qquad Gf = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\}$

- $f(x)=b$ funzione costante

  né iniettiva né surgettiva

  $Im(f) = \{b\}$

master con